5. CURVAS E INTEGRAL CURVILÍNEA

5.1. Curvas en $\mathbb{R}^n$

Definición de curva

Se dice que $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una **curva** si existe una aplicación continua $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha([a,b]) = \gamma$.

El origen de γ es $\alpha(a)$, el extremo es $\alpha(b)$, y el sentido el que va de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$. La función α se llama **parametrización** de γ.

Si $\alpha(a) \neq \alpha(b)$ la curva se llama **arco**, si $\alpha(a) = \alpha(b)$ se llama **curva cerrada**, y si α es inyectiva sobre $[a,b)$ (o $(a,b]$) se llama **curva simple**.

Observaciones

1. Toda curva admite infinitas parametrizaciones.

2. La parametrización $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial que se suele representar por

$$\alpha(t) = (x_1(t),\, x_2(t),\, \ldots,\, x_n(t))$$

3. Cada parametrización fija un sentido en el recorrido de la curva. Si se llama γ a la curva recorrida en el sentido fijado por $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, entonces la curva recorrida en sentido contrario se representa por $-\gamma$, y dos posibles parametrizaciones para $-\gamma$ son:

$$\begin{array}{lll} \beta : [a,b] & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \quad t & \longrightarrow \beta(t) = \alpha(a+b-t) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lll} \beta : [-b,-a] & \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \quad t & \longrightarrow \beta(t) = \alpha(-t) \end{array}$$

4. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función continua, su grafo $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in [a,b]\}$ es una curva (arco simple) plana parametrizada por $\alpha(t) = (t, f(t))$, $a \leq t \leq b$.

Ejemplos

1. El segmento S que va de $A(x_1, y_1)$ a $B(x_2, y_2)$ es una curva parametrizada por:

$$\alpha(t) = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)) \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

que también se puede expresar como:

$$\alpha(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{con} \quad \begin{cases} x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

2. La circunferencia de centro (a,b) y radio r, $C = \left\{(x,y) : (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2\right\}$, es una curva que admite, entre otras, las siguientes parametrizaciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1(t) &= (a + r\cos t, b + r\sin t) \quad , \qquad t \in [0, 2\pi] \\ \alpha_2(t) &= (a + r\cos t, b - r\sin t) \quad , \qquad t \in [0, 2\pi] \\ \alpha_3(t) &= (a + r\cos t^2, b + r\sin t^2) \quad , \qquad t \in [0, 2\pi] \\ \alpha_4(t) &= (a + r\cos 2\pi t, b + r\sin 2\pi t) \quad , \qquad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

La circunferencia C parametrizada por α_1, α_2 y α_4 es cerrada y simple, y parametrizada por α_3 no es cerrada ni simple. Con α_1, α_3 y α_4 se recorre en el sentido contrario a las agujas del reloj (positivo) y con α_2 en sentido contrario (negativo).

3. La elipse $E = \left\{(x, y) \,:\, \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\right\}$ es una curva parametrizada por

$$\begin{cases} \alpha(t) = (x_0 + a\cos t, y_0 + b\sin t) \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad \beta \equiv \begin{cases} x = x_0 + a\cos 2\pi t \\ y = y_0 + b\sin 2\pi t \end{cases} \quad , \quad 0 \leq t \leq 1$$

4. Se llama **cicloide** a la curva que describe un punto de una circunferencia cuando rueda (en línea recta y en posición perpendicular) sobre un plano hasta dar una vuelta completa. Cuando la circunferencia tiene radio unidad, rueda sobre el eje de abscisas y la posición inicial del punto es el origen, una parametrización de la cicloide es:

$$\alpha(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t) \quad , \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

5. La curva $\gamma \subset \mathbb{R}^3$ parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t,\, \sin t,\, t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$, es una vuelta de **hélice**.

6. La curva que en coordenadas polares tiene la ecuación $\rho = \rho(\theta)$, $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$, es una curva parametrizada por: $\alpha \equiv \begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}$, $\theta \in [\theta_1,\, \theta_2]$.

Curva suave

Se dice que $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una **curva suave** si admite una parametrización $\alpha \,:\, [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 (es decir, con derivada continua) y $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ (en los extremos del intervalo se consideran derivadas laterales). Cuando γ es cerrada, también se exige que $\alpha'(a) = \alpha'(b)$.

La derivada de la parametrización, $\alpha'(t) = (x_1'(t), x_2'(t), \ldots, x_n'(t))$, se llama **vector velocidad** o **vector tangente** a la curva, y su módulo $\|\alpha'(t)\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i'(t)^2\right)^{1/2}$ se llama **velocidad** de la curva en el punto $\alpha(t)$.

Curva suave a trozos

Se dice que $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una **curva suave a trozos** si admite una parametrización $\alpha \,:\, [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y una partición $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m = b$ tal que cada restricción $\gamma_i = \alpha|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $1 \leq i \leq m$, es una curva suave.

Reparametrización de una curva

Si $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una curva parametrizada por $\alpha \,:\, [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ y $u \,:\, [c, d] \longrightarrow [a, b]$ es una función con derivada continua distinta de cero tal que $u([c, d]) = [a, b]$, entonces

$$\begin{aligned} \beta \,:\, [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ s \quad &\longrightarrow \beta(s) = \alpha(u(s)) \end{aligned}$$

es otra parametrización de γ. Si $u' > 0$, α y β dan la misma orientación a γ, mientras que si $u' < 0$ dan orientaciones opuestas.

Observación: El concepto de curva y sus propiedades dependen de la parametrización. Por tanto, cuando se habla de una curva con ciertas propiedades (simple, cerrada, sentido, ...) se la supone con una parametrización que proporciona dichas propiedades.

Longitud de una curva

Si $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una curva simple suave a trozos parametrizada por $\alpha \,:\, [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$, su **longitud** viene dada por:

$$\text{long}(\gamma) = \int_a^b \left\|\alpha'(t)\right\|\, dt$$

Observación: La longitud de una curva no depende de la parametrización elegida (siempre que dicha parametrización haga simple a la curva).

Ejemplos

Halla la longitud de las siguientes curvas:

1. Circunferencia de radio r.

2. Cicloide: $\alpha(t) = (t - \sin t,\, 1 - \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

3. Arco de hélice cónica: $\alpha(t) = (e^t \cos t,\, e^t \sin t,\, e^t)$, desde $O(0,0,0)$ a $P(1,0,1)$.

Teorema (parametrización respecto a la longitud de arco)

Sea $\gamma \subset \mathbb{R}^n$ es una curva simple suave a trozos parametrizada por $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces, γ admite una reparametrización $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\|\beta'(s)\| = 1$ para todo $s \in [c,d]$ excepto quizás en un número finito de puntos (donde se trunca la suavidad).

Observación: El teorema anterior afirma que la longitud de γ entre su origen y $\beta(s)$ es s.

Ejercicios

1. Halla la longitud de las siguientes curvas:

(a) El arco de la parábola $y^2 = 12x$ comprendida en el primer cuadrante entre $x = 0$ y $x = 1$.

(b) El arco parametrizado por $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(c) La curva parametrizada por $\alpha(t) = \begin{cases} (2\cos t,\, 2\sin t,\, t) & \text{, si } 0 \leq t \leq 2\pi \\ (2,\, t - 2\pi,\, t) & \text{, si } 2\pi \leq t \leq 4\pi \end{cases}$.

(d) La curva de $\mathbb{R}^4$ parametrizada por $\alpha(t) = (\cos t,\, \sin t,\, \cos 2t,\, \sin 2t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

Soluciones y/o sugerencias a los ejercicios:

1. **(a)** $2 + \frac{3}{2}\ln 3$; **(b)** $2\pi\sqrt{a^2+b^2}$; **(c)** $2\pi(\sqrt{5}+\sqrt{2})$; **(d)** $\pi\sqrt{5}$.